Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x - 5\sin x = 0, \\ \sqrt{6y} - 2\cos x = 0. \end{cases}$

Решение.

Пусть $z = \sin x$. Первое уравнение принимает вид $2z^2 - 5z = 0$, откуда $z = 0$ или $z = \frac{5}{2}$.

Уравнение $\sin x = \frac{5}{2}$ не имеет решений.

Из второго уравнения системы следует, что $\cos x \geq 0$. Тогда из уравнения $\sin x = 0$ получаем: $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = 1$.

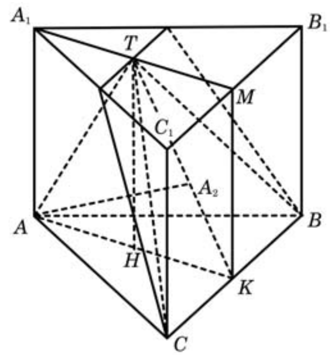
Второе уравнение принимает вид $\sqrt{6y} - 2 = 0$, откуда $y = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left(2\pi n; \frac{2}{3}\right),\ n \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение.



Плоскость BCT проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости AA_1M. Значит, $AA_1M \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M. Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK, где K – середина BC. Значит, угол ATK – искомый.

Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC: $AK = \frac{9}{2}$, а высота TH совпадает с высотой призмы.

Поэтому $\operatorname{tg} \angle ATH = \frac{AH}{TH} = \frac{9}{4 \cdot 6} < 1$.

Значит, искомый угол в два раза больше: $\angle ATK = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{8}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{3}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\frac{x^2-x-2}{x-3}+\frac{x^2-2x-3}{x-2}\ge 0$.

Решение.

Разложим квадратные трехчлены на множители:

$\frac{(x-2)(x+1)}{x-3}+\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}\ge 0$;

$(x+1)\left(\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-2}\right)\ge 0$;

$\frac{(x+1)\left((x-2)^2+(x-3)^2\right)}{(x-2)(x-3)}\ge 0$.

Выражение $(x-2)^2+(x-3)^2$ положительно при всех x.

Значит, $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}\ge 0$, откуда $-1\le x<2$ или $x>3$.

Ответ: $[-1;2),\ (3;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит один из верных промежутков.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB=8$, $CD=15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Решение.

Пусть F – точка пересечения прямой CD с отрезком AB. По теореме о касательной и секущей $AF^2=FC\cdot FD=FB^2$.

Значит, $AF=FB=4$, и F совпадает с E.

Возможны два случая взаимного расположения точек C, D и E:

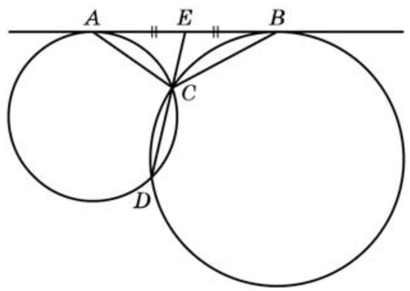


Рис. 1

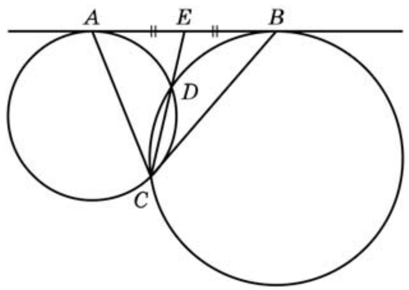


Рис. 2

1. $EC<ED$ (рис. 1).
2. $EC>ED$ (рис. 2).

Пусть x – длина меньшего из отрезков EC и ED, тогда, используя теорему о секущей и касательной, получаем: $4^2=x(x+15)$ или $x^2+15x-16=0$.

Значит, $x=\frac{-15+17}{2}=1$.

Поэтому $CE=x=1$ или $CE=x+15=16$.

Ответ: 16 или 1 .

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-7\left|x-a\right|-3x$ на отрезке $[-6;\,6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \ge a$: $f(x)=x^2-7(x-a)-3x=x^2-10x+7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

б) при $x \le a$: $f(x)=x^2+7(x-a)-3x=x^2+4x-7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=-2$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

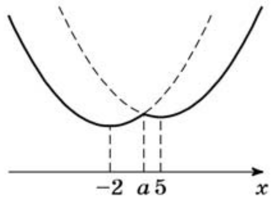


Рис. 1

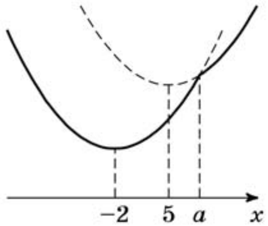


Рис. 2

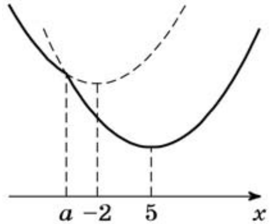


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах *а* и *б*, не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a;\ f(a))$.

3. Наибольшее значение на отрезке $[-6;6]$ функция f принимает на одном из концов отрезка (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x=a$ расположена вне интервала $(-2;\,5)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x=-2$; $x=5$, чем соответствующий конец отрезка.

То есть $\left[\begin{array}{c} a+2\le -2+6 \\ 5-a\le 6-5 \\ a\le -2 \\ a\ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le 2 \\ a\ge 4. \end{array}\right.$

Ответ: $a\le 2;\ a\ge 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab}=a^b+23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

В случаях $a=1$ или $b=1$ имеем: $24=1^b+23=\overline{1b}$ или $a^1+23=\overline{a1}=10a+1$, что невозможно. Далее считаем $a>1$ и $b>1$.

Пусть $a\le 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b\le 9$, так как иначе, если число b– k-значное ($k\ge 2$), имеем:

$a^b\ge 2^{(10^{k-1})}\ge 2^{10(k-1)}>10^{3(k-1)}=10^{k+(2k-3)}\ge 10^{k+1}>\overline{ab}.$

Пусть $a\ge 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b=2$ и $a\le 31$, так как иначе, если b– k-значное, а a – ($m+1$)-значно ($m\ge 1$), имеем:

если $k>1$, то $a^b\ge (10^m)^{10^{k-1}}\ge 10^{m\cdot(k+2)}=10^{(m+m)+m\cdot k}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ab}$;

если $k=1,\ b\ge 3$, то $a^b\ge (10^m)^3=10^{(m+m)+m}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ab}$;

если $k=1,\ b=2,\ m\ge 2$, то $a^b\ge (10^m)^2=10^{(m+m/2)+m/2}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ab}$;

если $k=1,\ b=2,\ m=1,\ a\ge 32$, то $a^b\ge (32)^2\ge 10^3=10^{(m+1)+k}>\overline{ab}$.

Конечным перебором всех пар a и b, для которых

либо $1 < a \le 9$ и $1 < b \le 9$,

либо $10 \le a \le 31$ и $b = 2$,

получаем, что уравнению удовлетворяют две пары $a = 3,\ b = 2;\ a = 7,\ b = 2$.

Ответ: $a = 3,\ b = 2;\ a = 7,\ b = 2$.

Замечание

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойств делимости, оценок величин и т.п.). Например:

Остается две возможности: либо $1 < a \le 9$ и $1 < b \le 9$, либо $10 \le a \le 31$ и $b = 2$.

В первом случае, если $a = 2$, имеем: $20 + b = 2^b + 23$, но $23 > 20$, а $2^b \ge b$.

Если $a = 3$, имеем: $30 + b = 3^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b = 2$ подходит, а $b = 3$ нет.

Если $a = 4$, имеем: $40 + b = 4^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не подходят.

При $a \ge 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр.

Значит, имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$; $a^2 - 10a + 21 = 0$, откуда получаем: $a = 3$ и $a = 7$.

Во втором случае имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$, решения которого меньше 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x+5\cos x-3}{\sqrt{x-\frac{\pi}{3}}}=0.$

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\cos^2 x+5\cos x-3=0, \\ x>\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Из системы получаем $\cos x=\dfrac{1}{2}$ или $\cos x=-3$. Уравнение $\cos x=-3$ не имеет решений. Учитывая, что $x>\dfrac{\pi}{3}$, из уравнения $\cos x=\dfrac{1}{2}$ получаем: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n=1,2,3,\ldots.$

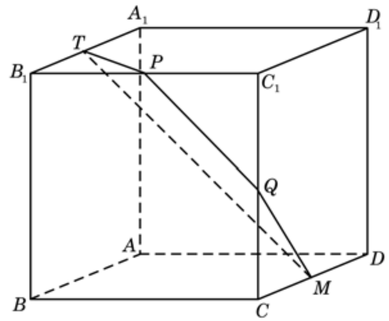
Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ \dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n=1,2,3,\ldots$

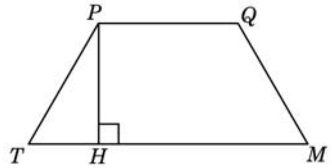
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак выражения $x-\dfrac{\pi}{3}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 осоответственно.

Решение.

Пусть P – середина ребра B_1C_1, а Q – середина ребра CC_1. Заметим, что $PQMT$ – трапеция, так как $MT \parallel B_1C \parallel PQ$. Значит, искомое расстояние – это высота трапеции $PQMT$.





Далее видим, что

$$TQ=QP=PM=\frac{1}{2}B_1C=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}BC=\frac{8\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{3},\ MT=16\sqrt{3}.$$

Высота трапеции $PQMT$ равна $8\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12.$

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\frac{x^2-x-6}{x-1}+\frac{x^2-4x+3}{x+2}\le 0$.

Решение.

Неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-3)(x+2)^2-(x-3)(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2+x-1)(x+2-(x-1))}{(x-1)(x+2)}\le 0,$$

откуда $\frac{3(x-3)(2x+1)}{(x-1)(x+2)}\le 0$.

Методом интервалов находим ответ: $x\in(-2,-\frac{1}{2}]\cup(1,3]$

Ответ: $(-2,-\frac{1}{2}]$, $(1,3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит один из верных промежутков.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. Известно, что $\frac{MH}{BH}=\frac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.

Поскольку $MH>BH$, точка H не может лежать на продолжении отрезка BM за точку M.

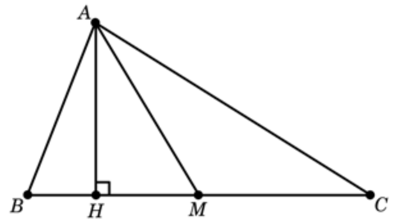


Рис. 1

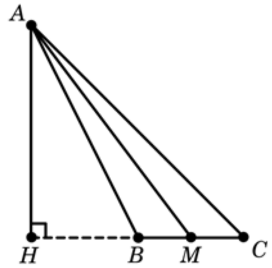


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда точка H лежит на отрезке BM (рис.1). Тогда

$$S_{\Delta AMB}=\frac{BM}{MH}\cdot S_{\Delta AMH}=\frac{5}{3}\cdot 24=40.$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AMB}=80$.

Если же точка H лежит на продолжении отрезка BM за точку B (рис.2), то $\frac{BM}{BH}=\frac{1}{2}$, поэтому

$$S_{\Delta AMB}=\frac{BM}{MH}\cdot S_{\Delta AMH}=\frac{1}{3}\cdot 2=48.$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AMB}=16$.

Ответ: 16 или 80.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-7\left|x-a\right|-x$ на отрезке $[-6;\ 7]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a$: $f(x)=x^2-7(x-a)-x=x^2-8x+7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$;

б) при $x \leq a$: $f(x)=x^2+7(x-a)-x=x^2+6x-7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=-3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

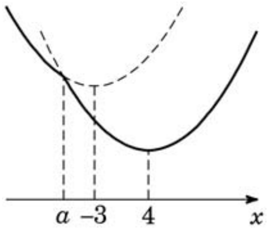


Рис. 1

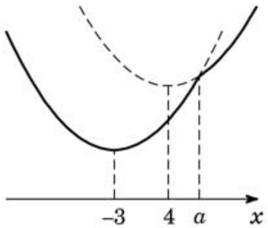


Рис. 2

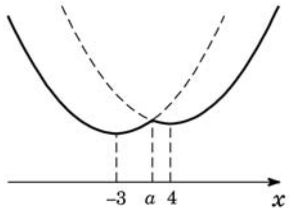


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах a и $б$, не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a;\ f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-6;\ 7]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x=a$ расположена вне интервала $(-3;\ 4)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x=-3$; $x=4$, чем соответствующий конец отрезка.

То есть $\left[\begin{array}{l} a+3\leq -3+6, \\ 4-a\leq 7-4, \\ a\leq -3, \\ a\geq 4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq 0, \\ a\geq 1. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty,\ 0],\ [1,\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{2x+17}{10}$, равно $\frac{3x+41}{3}$. Найдите все такие действительные значения x.

Решение.

Положим $\frac{3x+41}{3}=n,\quad n\in\mathbb{Z}$. Отсюда $\frac{2x+17}{10}=\frac{6n-31}{30}$. Поскольку число n есть наибольшее целое, не превосходящее числа $\frac{6n-31}{30}$, то имеем систему

$$\begin{cases} \frac{6n-31}{30}<n+1, \\ \frac{6n-31}{30}\geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n>-\frac{61}{24}=-2\frac{13}{24}, \\ n\leq -\frac{31}{24}=-1\frac{7}{24}. \end{cases} \Leftrightarrow n=-2.$$

Следовательно, $\frac{3x+41}{3}=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{47}{3}$.

Ответ: $-\frac{47}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sin^2 x + 7\sin x = 0, \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0. \end{cases}$

Решение.

Система равносильна системе

$$\begin{cases} 3\sin^2 x + 7\sin x = 0 \\ \sqrt{15y} = 5\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin^2 x + 7\sin x = 0 \\ 15y = 25\cos^2 x \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

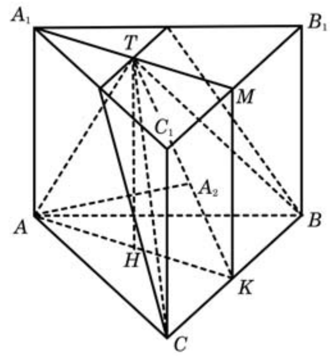
Из системы получаем $\sin x = 0$ или $\sin x = -\frac{7}{3}$. Уравнение $\sin x = -\frac{7}{3}$ не имеет решений. Учитывая $\cos x \ge 0$, получаем: $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Откуда $y = \frac{5}{3}$.

Ответ: $(2\pi n, \frac{5}{3})$, $n \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 4\sqrt{3}$, $BB_1 = 9$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение.



Плоскость BCT проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости AA_1M. Значит, $AA_1 \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M. Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK, где K – середина BC. Значит, угол ATK – искомый. Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC: $AK = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$, а высота TH совпадает с высотой призмы.

Поэтому $\operatorname{tg} \angle ATH = \frac{AH}{TH} = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3} < 1$.

Значит, искомый угол в два раза больше: $ATK = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\dfrac{x^2-x-6}{x-1}-\dfrac{x^2-4x+3}{x+2}\ge 0.$

Решение.

Неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-3)(x+2)^2-(x-3)(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2+x-1)(x+2-(x-1))}{(x-1)(x+2)}\ge 0,$$

откуда $\dfrac{3(x-3)(2x+1)}{(x-1)(x+2)}\ge 0.$

Методом интервалов находим ответ: $x\in(-\infty,\ -2)\cup[-\frac{1}{2},\ 1)\cup[3,\ +\infty)$

Ответ: $(-\infty,\ -2),\ [-\frac{1}{2},\ 1),\ [3,\ +\infty).$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит один из верных промежутков.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB=12$, $CD=5$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Решение.

Пусть F – точка пересечения прямой CD с отрезком AB. По теореме о касательной и секущей $AF^2=FC\cdot FD=FB^2$. Значит, $AF=FB=\dfrac{AB}{2}=6$, и F совпадает с E.

Возможны два случая взаимного расположения точек C, D и E:

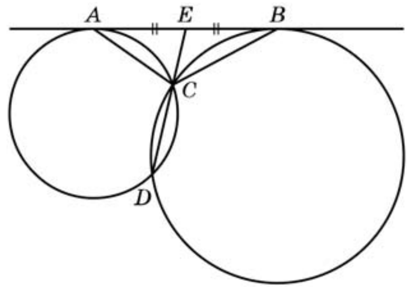


Рис. 1

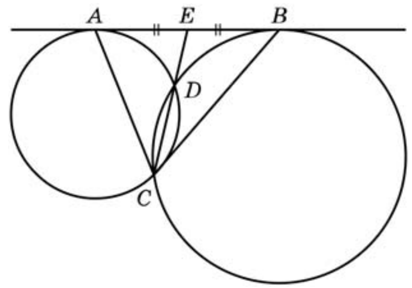


Рис. 2

1. $EC<ED$ (рис. 1).

2. $EC>ED$ (рис. 2).

Пусть x – длина меньшего из отрезков CE и ED, тогда, используя теорему о секущей и касательной, получаем: $6^2=x(x+5)$ или $x^2+5x-36=0$.

Значит, $x=\dfrac{-5\pm 13}{2}$, поскольку $x>0$, то $x=4$.

Поэтому $CE=x=4$ или $CE=x+5=9$.

Ответ: 4 или 9

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

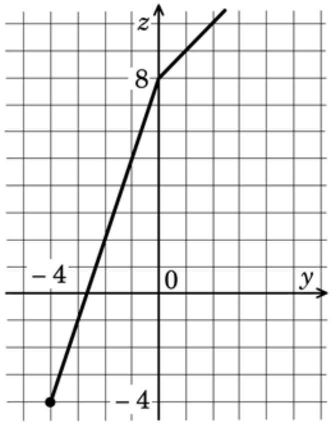
C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\left|x^2-4x\right|-x^2+4x-8\right| < \sqrt{a^2+2a-3}-a-(x-1)^2+2x$ имеет от одного до трех целых решений.

Решение.

Сделаем замену $x^2-4x=y$. Тогда $y\ge -4$, при этом, если x – целое, то y – также целое число.

Неравенство примет вид $\left||y|-y-8\right|+y<\sqrt{a^2+2a-3}-a-1$.

Построим график функции $f(y)=\left||y|-y-8\right|+y$ при $y\ge -4$, находим, что эта функция монотонно возрастает. Следовательно, если y_0 является решением неравенства при некотором a, то все $y<y_0$ также являются решениями.



Значит, если есть решение $y_0\ge 0$, то целые числа -4 и -3 также будут решениями, и тогда будет, по крайней мере, пять решений данного неравенства: $x=0,\ 1, 2, 3, 4$.

Следовательно, $-4\le y<0$, и, стало быть, $-4\le f(y)<8$.

Значит, должно выполняться двойное неравенство

$-4<\sqrt{a^2+2a-3}-a-1\le 8$, откуда

$$\begin{cases} a-3<\sqrt{a^2+2a-3}, \\ \sqrt{a^2+2a-3}\le a+9. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $\begin{cases} a<3, \\ a^2+2a-3\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a^2-6a+9<a^2+2a-3, \\ a\ge 3 \end{cases}$

откуда $a\le -3$ или $1\le a<3$.

Решение второго неравенства: $\begin{cases} a^2+2a-3\le a^2+18a+81, \\ a+9\ge 0, \end{cases}$ откуда $a\ge -\dfrac{21}{4}$.

Решение системы: $-\dfrac{21}{4}\le a\le -3$ или $a\ge 1$.

Ответ: $[-\dfrac{21}{4},\ -3],\ [1,\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\dfrac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие значения x.

Решение.

По условию $x\ge\dfrac{x^2+6}{7}\ge\dfrac{6}{7}>0$. Поэтому если обозначить $\dfrac{x^2+6}{7}=b$, то $x=\sqrt{7b-6}$.

Тогда число b – целое и должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} b\le\sqrt{7b-6}, \\ b>\sqrt{7b-6}-1, \\ b\ge\dfrac{6}{7} \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} b^2-7b+6\le 0, \\ b^2-5b+7>0, \\ b\ge\dfrac{6}{7} \end{cases}$$

Второе неравенство верно при всех b, а из первого неравенства находим: $1 \le b \le 6$.

Следовательно, $x = \sqrt{7 \cdot 1 - 6} = 1$, $x = \sqrt{8}$, $x = \sqrt{15}$, $x = \sqrt{22}$, $x = \sqrt{29}$ и $x = 6$.

Ответ: $1, \sqrt{8}, \sqrt{15}, \sqrt{22}, \sqrt{29}, 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $\dfrac{-4\sin^2 x+8\cos x+7}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}=0.$

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -4\sin^2 x+8\cos x+7=0 \\ \operatorname{ctg} x>0 \end{cases}$$

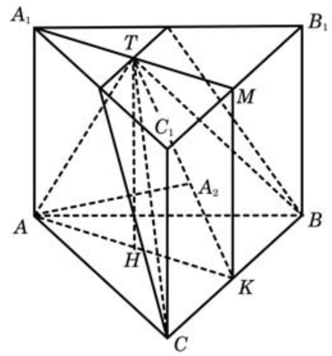
Уравнение системы приводится к виду $4\cos^2 x+8\cos x+3=0$, откуда $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ или $\cos x=-\dfrac{3}{2}$. Уравнение $\cos x=-\dfrac{3}{2}$ не имеет решений. Учитывая, что $\operatorname{ctg} x>0$, из уравнения $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ получаем: $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB=5\sqrt{3}$, $BB_1=6$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение.



Плоскость BCT проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости AA_1M. Значит, $AA_1\perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M. Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK, где K – середина BC. Значит, угол ATK – искомый. Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT=TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC: $AK=5\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15}{2}$, а высота TH совпадает с высотой призмы.

Поэтому $\operatorname{tg}\angle ATH=\dfrac{AH}{TH}=\dfrac{15}{4\cdot 6}=\dfrac{5}{8}<1.$

Значит, искомый угол в два раза больше: $ATK=2\operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}.$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\frac{x^2-x-2}{x-3}-\frac{x^2-2x-3}{x-2}\le 0.$

Решение.

Неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x+1)(x-2)^2+(x+1)(x-3)^2}{(x-2)(x-3)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)((x-2)^2+(x-3)^2)}{(x-2)(x-3)}\le 0.$$

Учитывая, что $(x-2)^2+(x-3)^2>0$ при всех x, имеем $\frac{(x+1)}{(x-2)(x-3)}\le 0.$

Методом интервалов находим ответ: $x\in(-\infty,\,-1]\cup(2,3)$

Ответ: $(-\infty,\,-1],\ (2,3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит один из верных промежутков.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $\frac{KM}{KL}=\frac{1}{2}$, $\frac{PH}{MH}=\frac{3}{2}$, а площадь треугольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

Решение.

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{MP}{LP}=\frac{KM}{KL}=\frac{1}{2}$. Поскольку $PH>MH$, точка H не может лежать на продолжении отрезка MP за точку P.

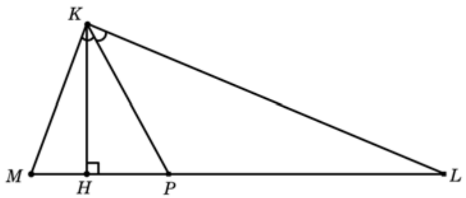


Рис. 1

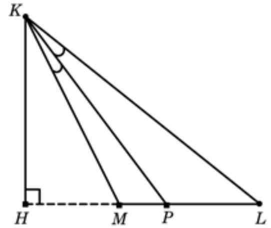


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда точка H лежит на отрезке MP (рис.1). Тогда

$$S_{\Delta MKP}=\frac{MP}{PH}\cdot S_{\Delta KHP}=\frac{5}{3}\cdot 30=50.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta MKP}=\frac{ML}{MP}\cdot S_{\Delta MKP}=3\cdot 50=150.$$

Если же точка H лежит на продолжении отрезка MP за точку M (рис.2), то $\frac{MP}{PH}=\frac{1}{3}$, поэтому

$$S_{\Delta KMP}=\frac{MP}{PH}\cdot S_{\Delta KHP}=\frac{1}{3}\cdot 30=10.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta KLM}=\frac{ML}{MP}\cdot S_{KMP}=3\cdot 10=30.$$

Ответ: 30 или 150.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-9\,|x-a|-5x$ на отрезке $[-8;\ 9]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a$: $f(x)=x^2-14x+9a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=7$;

б) при $x \leq a$: $f(x)=x^2+4x-9a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=-3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

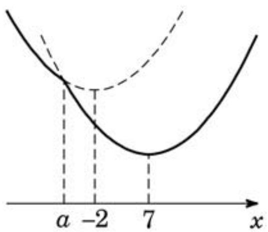


Рис. 1

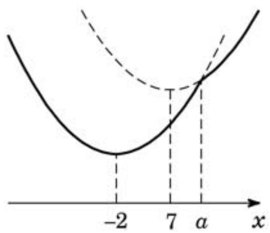


Рис. 2

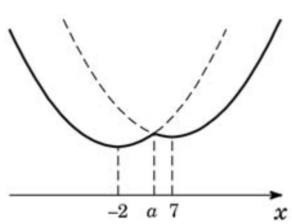


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах a и $б$, не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a;\ \ f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-8;9]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x=a$ расположена вне интервала $(-2;\ 7)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x=-2$; $x=7$, чем соответствующий конец отрезка.

$$\text{То есть}\ \left[\begin{array}{l} a+2 \leq -2+8, \\ 7-a \leq 9-7, \\ a \leq -2, \\ a \geq 7, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq 4, \\ a \geq 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,\ 4],\ [5,\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab}=a^b+18$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

В случае $a=1$ имеем: $10^k+b=1^b+18=19$, откуда $b=9$.

В случае $b=1$ имеем: $10a+1=a^1+18$, откуда $9a=17$, что невозможно для целого a.

Далее считаем, что $a>1$ и $b>1$

Пусть $a \leq 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b \leq 9$, так как иначе, если число b– k-значное ($k \geq 2$), имеем:

$a^b \geq 2^{(10^{k-1})} \geq 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \geq 10^{k+1} > \overline{ab}$.

Пусть $a \geq 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b=2$ и $a \leq 31$, так как иначе, если b– k-значное, а a – ($m+1$)-значно ($m \geq 1$), имеем:

если $k>1$, то $a^b \geq (10^m)^{10^{k-1}} \geq 10^{m\cdot(k+2)} = 10^{(m+m)+m\cdot k} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k=1$, $b \geq 3$, то $a^b \geq (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k=1,\ b=2,\ m\geq 2$, то $a^b \geq (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;
если $k=1,\ b=2,\ m=1,\ a\geq 32$, то $a^b \geq (32)^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$.

Если $10 \leq a \leq 31$ и $b=2$ приходим к уравнению $10a+2=a^2+18$, откуда $a^2-10a+16=0$. Оба корня $a=2$ или $a=8$ меньше 10.

Конечным перебором всех пар a и b, для которых $1<a\leq 9$ и $1<b\leq 9$ получаем, что уравнению удовлетворяют еще две пары $a=2,\ b=2$ и $a=8,\ b=2$.

Ответ: $a=2,\ b=2;\ a=8,\ b=2;\ \ a=1,\ b=9$.

Замечание

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (четности, свойств делимости, оценок и т.п.). Например:

1. Если $a=2$, получаем: $20+b=2^b+18$, откуда $2^b-b=2$ и, значит, $b=2$.

2. Если $a=3$, имеем: $30+b=3^b+18$, откуда $3^b-b=12$, значит b нечетное, но для $b\geq 3$ $3^b-b\geq 24$.

3. Если $a=4$, имеем: $40+b=4^b+18$.

При $b>3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b=2$ и $b=3$ не одходят.

4. При $a\geq 5$, если $b>2$ в уравнении $10a+b=a^b+18$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Значит, $b=2$. Приходим к уже известному уравнению $a^2-10a+16=0$, корни которого $a=2$ или $a=8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sqrt{x - \frac{\pi}{3}}} = 0.$

Решение.

Из уравнения $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$ находим: $\cos x = \dfrac{1}{2}$ или $\cos x = -3$.

Второе уравнение не имеет решений, а из первого получаем, что $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Из условия $x - \dfrac{\pi}{3} > 0$ следует, что $x > \dfrac{\pi}{3}$.

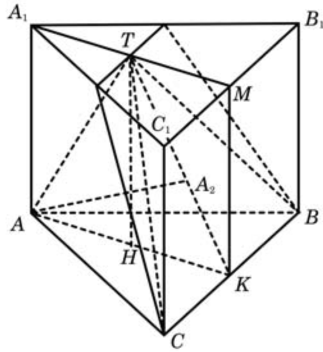
Поэтому $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак выражения $x - \dfrac{\pi}{3}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение.



Плоскость BCT проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости AA_1M. Значит, $AA_1M \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M. Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK, где K – середина BC. Значит, угол ATK – искомый.

Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC: $AK = \dfrac{9}{2}$, а высота TH совпадает с высотой призмы. Поэтому $\operatorname{tg}\angle ATH = \dfrac{AH}{TH} = \dfrac{9}{4 \cdot 6} < 1$. Значит, искомый угол в два раза больше: $\angle ATK = 2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{8}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{5^{x+8}}14}{\log_{5^{x+8}}\left(x^2-25\right)} \geq \dfrac{\log_2\left(x^2+9x+14\right)}{\log_2\left(x^2-25\right)}$.

Решение.
Решение ищем на множестве:

$$\begin{cases} x \neq -8, \\ x^2-25>0, \\ x^2-25 \neq 1, \\ x^2+9x+14>0 \end{cases} \Leftrightarrow \; x \in (-\infty;\,-8) \cup (-8;\,-7) \cup (5;\,\sqrt{26}) \cup (\sqrt{26};\,+\infty).$$

Перепишем неравенство: $\log_{x^2-25}\left(x^2+9x+14\right) \leq \log_{x^2-25}14$.

Далее рассматриваем два случая:

1. $\begin{cases} 0<x^2-25<1, \\ x^2+9x+14 \geq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \; 5<x<\sqrt{26}.$

2. $\begin{cases} x^2-25>1, \\ x^2+9x+14 \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>26, \\ -9 \leq x \leq 0. \end{cases}$

Значит, $x \in [-9;\,-\sqrt{26})$.
С учетом ограничений на x получаем:
$x \in [-9;\,-8) \cup (-8;\,-7) \cup (5;\,\sqrt{26})$.
Ответ: $[-9;\,-8) \cup (-8;\,-7) \cup (5;\,\sqrt{26})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB=8$, $CD=15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Решение.
Пусть F – точка пересечения прямой CD с отрезком AB. По теореме о касательной и секущей $AF^2=FC\cdot FD=FB^2$.

Значит, $AF=FB=4$, и F совпадает с E.

Возможны два случая взаимного расположения точек C, D и E:

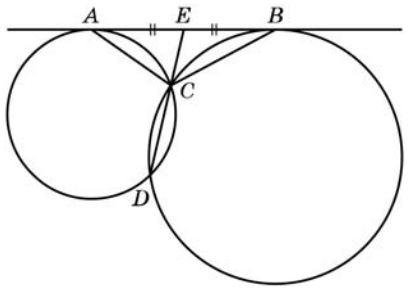


Рис. 1

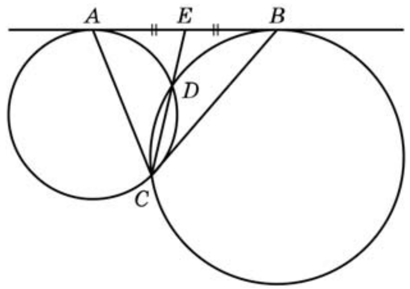


Рис. 2

1. $EC<ED$ (рис. 1).
2. $EC>ED$ (рис. 2).

Пусть x – длина меньшего из отрезков EC и ED, тогда, используя теорему о секущей и касательной, получаем: $4^2=x(x+15)$ или $x^2+15x-16=0$.

Значит, $x=\dfrac{-15+17}{2}$.

Поэтому $CE=x$ или $CE=x+15$.

Ответ: 16 или 1 .

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7\left|x - a\right| - 3x$ на отрезке $[-6; 6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a$: $f(x) = x^2 - 7(x - a) - 3x = x^2 - 10x + 7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 5$;

б) при $x \leq a$: $f(x) = x^2 + 7(x - a) - 3x = x^2 + 4x - 7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -2$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

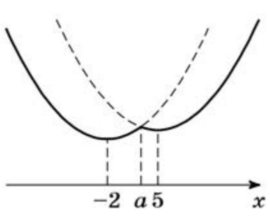


Рис. 1

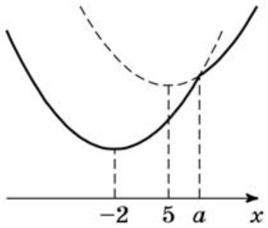


Рис. 2

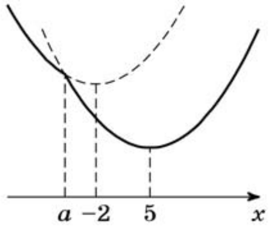


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах *а* и *б*, не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a;\ f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-6; 6]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x = a$ расположена вне интервала $(-2; 5)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x = -2$; $x = 5$, чем соответствующий конец отрезка.

То есть $\left[\begin{array}{c} a + 2 \leq -2 + 6 \\ 5 - a \leq 6 - 5 \\ a \leq -2 \\ a \geq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq 2 \\ a \geq 4. \end{array}\right.$

Ответ: $a \leq 2$; $a \geq 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

В случаях $a = 1$ или $b = 1$ имеем: $24 = 1^b + 23 = \overline{1b}$ или $a^1 + 23 = \overline{a1} = 10a + 1$, что невозможно. Далее считаем $a > 1$ и $b > 1$.

Пусть $a \leq 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b \leq 9$, так как иначе, если число b– k-значное ($k \geq 2$), имеем:

$a^b \geq 2^{(10^{k-1})} \geq 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \geq 10^{k+1} > \overline{ab}$.

Пусть $a \geq 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b = 2$ и $a \leq 31$, так как иначе, если b– k-значное, а a – ($m+1$)-значно ($m \geq 1$), имеем:

если $k > 1$, то $a^b \geq (10^m)^{10^{k-1}} \geq 10^{m\cdot(k+2)} = 10^{(m+m)+m\cdot k} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k = 1$, $b \geq 3$, то $a^b \geq (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k = 1$, $b = 2$, $m \geq 2$, то $a^b \geq (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k = 1$, $b = 2$, $m = 1$, $a \geq 32$, то $a^b \geq (32)^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$.

Конечным перебором всех пар a и b, для которых

либо $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$,

либо $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$,

получаем, что уравнению удовлетворяют две пары $a = 3$, $b = 2$; $a = 7$, $b = 2$.

Ответ: $a = 3$, $b = 2$; $a = 7$, $b = 2$.

Замечание

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойств делимости, оценок величин и т.п.). Например:

Остается две возможности: либо $1 < a \le 9$ и $1 < b \le 9$, либо $10 \le a \le 31$ и $b = 2$.

В первом случае, если $a = 2$, имеем: $20 + b = 2^b + 23$, но $23 > 20$, а $2^b > b$.

Если $a = 3$, имеем: $30 + b = 3^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b = 2$ подходит, а $b = 3$ нет.

Если $a = 4$, имеем: $40 + b = 4^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не подходят.

При $a \ge 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр.

Значит, имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$; $a^2 - 10a + 21 = 0$, откуда получаем: $a = 3$ и $a = 7$.

Во втором случае имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$, решения которого меньше 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{4\cos^2 x - 8\sin x - 7}{\sqrt{\mathrm{tg}x}} = 0.$

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\cos^2 x - 8\sin x - 7 = 0 \\ \mathrm{tg}\, x > 0 \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду $4\sin^2 x + 8\sin x + 3 = 0$, откуда $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ или $\sin x = -\dfrac{3}{2}$. Уравнение $\sin x = -\dfrac{3}{2}$ не имеет решений. Учитывая, что $\mathrm{tg}\, x > 0$, из уравнения $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ получаем: $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

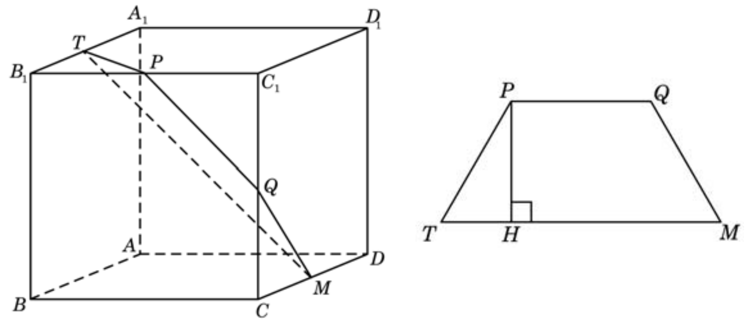
Ответ: $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 соответственно.

Решение.

Пусть P – середина ребра B_1C_1, а Q – середина ребра CC_1. Заметим, что $PQMT$ – трапеция, так как $MT \parallel B_1C \parallel PQ$. Значит, искомое расстояние – это высота трапеции $PQMT$.



Далее видим, что

$$TQ = QP = PM = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}BC = \frac{8\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{3},\ MT = 16\sqrt{3}.$$

Высота трапеции $PQMT$ равна $8\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12.$

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{2^{x+6}} 15}{\log_{2^{x+6}}\left(x^2-16\right)} \ge \dfrac{\log_3\left(x^2+8x+15\right)}{\log_3\left(x^2-16\right)}$.

Решение.

Решение ищем на множестве

$$\begin{cases} x \ne 6 \\ x^2-16>0 \\ x^2-16 \ne 1 \\ x^2+8x+15>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ -6) \cup (-6,\ -5) \cup (4,\ \sqrt{17}) \cup (\sqrt{17},\ +\infty).$$

Перепишем неравенство $\log_{x^2-16} 15 \ge \log_{x^2-16}(x^2+8x+15)$.

Далее рассматриваем два случая:

1. $\begin{cases} 0<x^2-16<1, \\ 15 \le x^2+8x+15 \end{cases} \Leftrightarrow 4<x<\sqrt{17}$

2. $\begin{cases} x^2-16>1, \\ 15 \ge x^2+8x+15 \end{cases} \Leftrightarrow -8<x<-\sqrt{17}$

С учетом ограничений на x получаем:

$x \in (-8,\ -6) \cup (-6,\ -\sqrt{17}) \cup (4,\ \sqrt{17})$

Ответ: $(-8,\ -6)$, $(-6,\ -\sqrt{17})$, $(4,\ \sqrt{17})$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. Известно, что $\dfrac{MH}{BH}=\dfrac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.

Поскольку $MH>BH$, точка H не может лежать на продолжении отрезка BM за точку M.

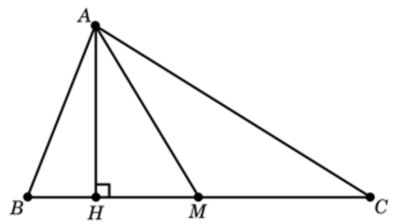


Рис. 1

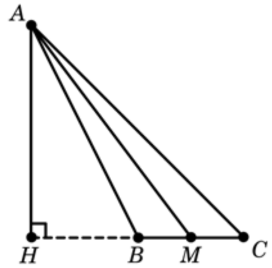


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда точка H лежит на отрезке BM (рис.1). Тогда

$$S_{\Delta AMB}=\frac{BM}{MH}\cdot S_{\Delta AMH}=\frac{5}{3}\cdot 24=40.$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AMB}=80$.

Если же точка H лежит на продолжении отрезка BM за точку B (рис.2), то $\dfrac{BM}{BH}=\dfrac{1}{2}$, поэтому

$$S_{\Delta AMB}=\frac{BM}{MH}\cdot S_{\Delta AMH}=\frac{1}{3}\cdot 2=48.$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AMB}=16$.

Ответ: 16 или 80.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-7|x-a|-x$ на отрезке $[-6;\ 7]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \ge a$: $f(x)=x^2-7(x-a)-x=x^2-8x+7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$;

б) при $x \le a$: $f(x)=x^2+7(x-a)-x=x^2+6x-7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=-3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

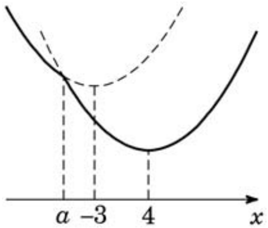


Рис. 1

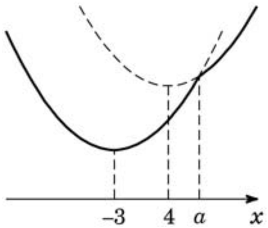


Рис. 2

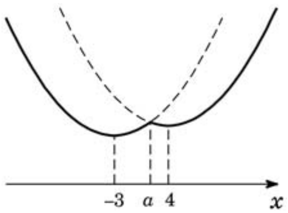


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах *а* и *б*, не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a;\ f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-6;\ 7]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x=a$ расположена вне интервала $(-3;\ 4)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x=-3$; $x=4$, чем соответствующий конец отрезка.

То есть $\left[\begin{array}{l} a+3 \le -3+6, \\ 4-a \le 7-4, \\ a \le -3, \\ a \ge 4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 1. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty,\ 0],\ [1,\ +\infty)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Наибольшее целое число, не превосходящее $\dfrac{2x+17}{10}$, равно $\dfrac{3x+41}{3}$.

Найдите все такие действительные значения x.

Решение.

Положим $\dfrac{3x+41}{3}=n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\dfrac{2x+17}{10}=\dfrac{6n-31}{30}$. Поскольку число n есть наибольшее целое, не превосходящее числа $\dfrac{6n-31}{30}$, то имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{6n-31}{30} < n+1, \\ \dfrac{6n-31}{30} \ge n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > -\dfrac{61}{24} = -2\dfrac{13}{24}, \\ n \le -\dfrac{31}{24} = -1\dfrac{7}{24}. \end{cases} \Leftrightarrow n=-2.$$

Следовательно, $\dfrac{3x+41}{3}=-2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{47}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{47}{3}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \left(\dfrac{36}{25}\right)^{\operatorname{tg} x} + \left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0, \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0. \end{cases}$

Решение.

Система равносильна системе

$$\begin{cases} \left(\dfrac{36}{25}\right)^{\operatorname{tg} x} + \left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0 \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x}\right)^2 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0 \\ 15y = 25\cos^2 x \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

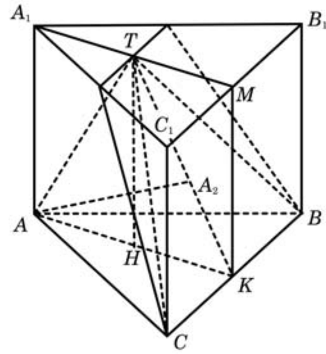
Из системы получаем $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$ или $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} = -2$. Уравнение $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} = -2$ не имеет решений. Уравнение $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = 0$. Учитывая $\cos x \ge 0$, получаем: $x = 2\pi n$, $n \in Z$. Откуда $y = \dfrac{5}{3}$.

Ответ: $\left(2\pi n, \dfrac{5}{3}\right)$, $n \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 4\sqrt{3}$, $BB_1 = 9$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение.



Плоскость BCT проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости AA_1M. Значит, $AA_1 \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M. Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK, где K – середина BC. Значит, угол ATK – искомый. Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC: $AK = 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$, а высота TH совпадает с высотой призмы.

Поэтому $\operatorname{tg} \angle ATH = \dfrac{AH}{TH} = \dfrac{6}{2 \cdot 9} = \dfrac{1}{3} < 1$.

Значит, искомый угол в два раза больше: $ATK = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{2x+9}(\log_{0,5}(x^2+4x))}{\log_{2x+9}(x^2+8x+17)} \geq 0.$

Решение.

Поскольку $x^2+8x+17=(x+4)^2+1 \geq 1$ рассмотрим два случая:

1. $\begin{cases} 0<2x+9<1 \\ \log_{0,5}(x^2+4x) \geq 1 \\ \log_{2x+9}(x^2+8x+17)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{9}{2}<x<-4 \\ 0<x^2+4x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{9}{2}<x<-4 \\ x<-4, x>0 \\ -2-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \leq x \leq -2+\dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$

Откуда $-2-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \leq x < -4$.

2. $\begin{cases} 2x+9>1 \\ \log_{0,5}(x^2+4x) \geq 1 \\ \log_{2x+9}(x^2+8x+17)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ 0<x^2+4x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x<-4, x>0 \\ -2-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \leq x \leq -2+\dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$

Откуда $0 < x \leq -2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\left[-2-\dfrac{3}{\sqrt{2}}, -4\right), \left(0, -2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right].$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB=12$, $CD=5$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Решение.

Пусть F – точка пересечения прямой CD с отрезком AB. По теореме о касательной и секущей $AF^2=FC \cdot FD=FB^2$. Значит, $AF=FB=\dfrac{AB}{2}=6$, и F совпадает с E.

Возможны два случая взаимного расположения точек C, D и E:

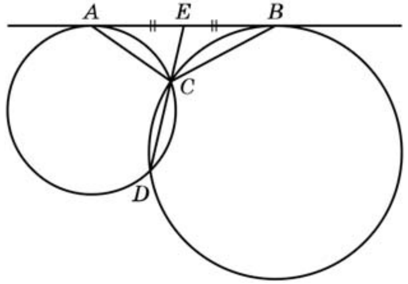


Рис. 1

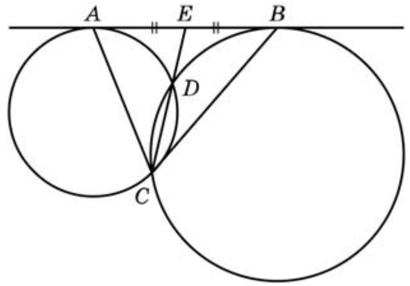


Рис. 2

1. $EC<ED$ (рис. 1).

2. $EC>ED$ (рис. 2).

Пусть x – длина меньшего из отрезков CE и ED, тогда, используя теорему о секущей и касательной, получаем: $6^2=x(x+5)$ или $x^2+5x-36=0$.

Значит, $x=\dfrac{-5 \pm 13}{2}$, поскольку $x>0$, то $x=4$.

Поэтому $CE=x=4$ или $CE=x+5=9$.

Ответ: 4 или 9

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

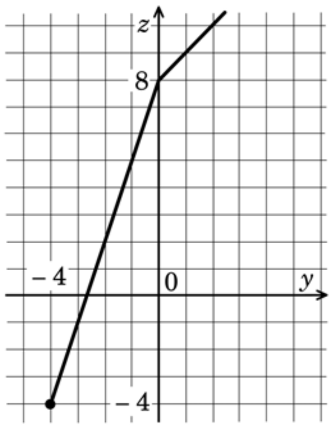
C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\left|x^2-4x\right|-x^2+4x-8\right|<\sqrt{a^2+2a-3}-a-(x-1)^2+2x$ имеет от одного до трех целых решений.

Решение.

Сделаем замену $x^2-4x=y$. Тогда $y\ge-4$, при этом, если x – целое, то y – также целое число.

Неравенство примет вид $\left||y|-y-8\right|+y<\sqrt{a^2+2a-3}-a-1$.

Построим график функции $f(y)=\left||y|-y-8\right|+y$ при $y\ge-4$, находим, что эта функция монотонно возрастает. Следовательно, если y_0 является решением неравенства при некотором a, то все $y<y_0$ также являются решениями.



Значит, если есть решение $y_0\ge0$, то целые числа -4 и -3 также будут решениями, и тогда будет, по крайней мере, пять решений данного неравенства: $x=0,\ 1,2,3,4$.

Следовательно, $-4\le y<0$, и, стало быть, $-4\le f(y)<8$.

Значит, должно выполняться двойное неравенство

$-4<\sqrt{a^2+2a-3}-a-1\le8$, откуда

$$\begin{cases} a-3<\sqrt{a^2+2a-3}, \\ \sqrt{a^2+2a-3}\le a+9. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $\begin{cases} a<3, \\ a^2+2a-3\ge0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a^2-6a+9<a^2+2a-3, \\ a\ge3 \end{cases}$

откуда $a\le-3$ или $1\le a<3$.

Решение второго неравенства: $\begin{cases} a^2+2a-3\le a^2+18a+81, \\ a+9\ge0, \end{cases}$ откуда $a\ge-\dfrac{21}{4}$.

Решение системы: $-\dfrac{21}{4}\le a\le-3$ или $a\ge1$.

Ответ: $[-\dfrac{21}{4},\ -3],\ [1,\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\dfrac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие действительные значения x.

Решение.

По условию $x\ge\dfrac{x^2+6}{7}\ge\dfrac{6}{7}>0$. Поэтому если обозначить $\dfrac{x^2+6}{7}=b$, то $x=\sqrt{7b-6}$.

Тогда число b – целое и должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} b\le\sqrt{7b-6}, \\ b>\sqrt{7b-6}-1, \\ b\ge\dfrac{6}{7} \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} b^2-7b+6\le0, \\ b^2-5b+7>0, \\ b\ge\dfrac{6}{7} \end{cases}$$

Второе неравенство верно при всех b, а из первого неравенства находим: $1 \le b \le 6$.

Следовательно, $x = \sqrt{7 \cdot 1 - 6} = 1$, $x = \sqrt{8}$, $x = \sqrt{15}$, $x = \sqrt{22}$, $x = \sqrt{29}$ и $x = 6$.

Ответ: $1, \sqrt{8}, \sqrt{15}, \sqrt{22}, \sqrt{29}, 6$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{4\sin^2 x - 8\cos x - 7}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0.$

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\sin^2 x - 8\cos x - 7 = 0 \\ \operatorname{ctg} x > 0 \end{cases}$$

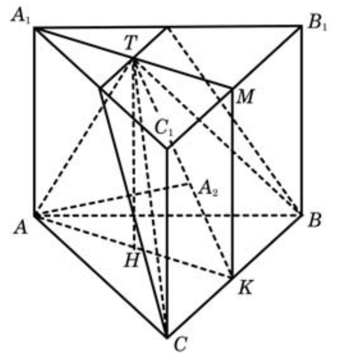
Уравнение системы приводится к виду $4\sin^2 x - 8\cos x - 7 = 0$, откуда $\cos x = \dfrac{2-\sqrt{11}}{2}$ или $\cos x = \dfrac{2+\sqrt{11}}{2}$. Уравнение $\cos x = \dfrac{2+\sqrt{11}}{2}$ не имеет решений. Учитывая, что $\operatorname{ctg} x > 0$, из уравнения $\cos x = \dfrac{2-\sqrt{11}}{2}$ получаем: $x = -\arccos\left(\dfrac{2-\sqrt{11}}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $-\arccos\left(\dfrac{2-\sqrt{11}}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 5\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение.



Плоскость BCT проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости AA_1M. Значит, $AA_1 \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M. Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK, где K – середина BC. Значит, угол ATK – искомый. Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC: $AK = 5\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15}{2}$, а высота TH совпадает с высотой призмы.

Поэтому $\operatorname{tg} \angle ATH = \dfrac{AH}{TH} = \dfrac{15}{4 \cdot 6} = \dfrac{5}{8} < 1.$

Значит, искомый угол в два раза больше: $ATK = 2\operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}.$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{11-2x}(\log_{0,5}(x^2-6x+5))}{\log_{11-2x}(x^2-10x+26)} \geq 0.$

Решение.

Поскольку $x^2-10x+26=(x-5)^2+1\geq 1$ рассмотрим два случая:

$$1.\ \begin{cases} 0<11-2x<1 \\ \log_{0,5}(x^2-6x+5)\geq 1 \\ \log_{2x+9}(x^2-10x+26)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5<x<\dfrac{11}{2} \\ 0<x^2-6x+5\leq\dfrac{1}{2} \\ x\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5<x<\dfrac{11}{2} \\ x<1, x>5 \\ 3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\leq x\leq 3+\dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Откуда $5<x\leq 3+\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

$$2.\ \begin{cases} 11-2x>1 \\ \log_{0,5}(x^2-6x+5)\geq 1 \\ \log_{2x+9}(x^2-10x+26)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ 0<x^2-6x+5\leq\dfrac{1}{2} \\ x\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x<1, x>5 \\ 3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\leq x\leq 3+\dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Откуда $3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\leq x<1$

Ответ: $\left[3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(5, 3+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $\dfrac{KM}{KL}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{PH}{MH}=\dfrac{3}{2}$, а площадь тругольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

Решение.

По свойству биссектрисы треугольника $\dfrac{MP}{LP}=\dfrac{KM}{KL}=\dfrac{1}{2}$. Поскольку $PH>MH$, точка H не может лежать на продолжении отрезка MP за точку P.

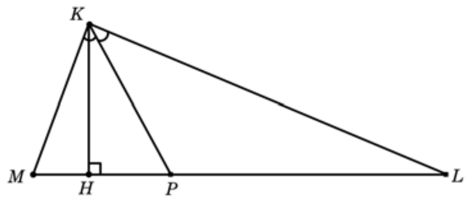


Рис. 1

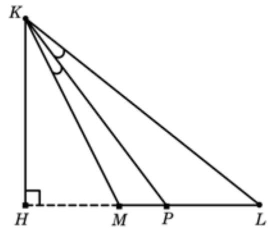


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда точка H лежит на отрезке MP (рис.1). Тогда

$$S_{\Delta MKP}=\frac{MP}{PH}\cdot S_{\Delta KHP}=\frac{5}{3}\cdot 30=50.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta MKP}=\frac{ML}{MP}\cdot S_{\Delta MKP}=3\cdot 50=150.$$

Если же точка H лежит на продолжении отрезка MP за точку M (рис.2), то $\dfrac{MP}{PH}=\dfrac{1}{3}$, поэтому

$$S_{\Delta KMP}=\frac{MP}{PH}\cdot S_{\Delta KHP}=\frac{1}{3}\cdot 30=10.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta KLM}=\frac{ML}{MP}\cdot S_{KMP}=3\cdot 10=30.$$

Ответ: 30 или 150.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 9\left|x - a\right| - 5x$ на отрезке $[-8;\ 9]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \ge a$: $f(x) = x^2 - 14x + 9a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 7$;

б) при $x \le a$: $f(x) = x^2 + 4x - 9a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

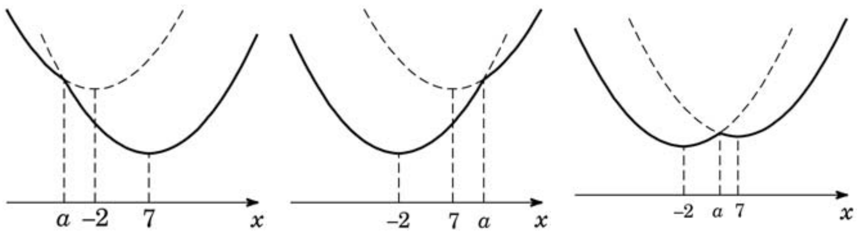


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах $а$ и $б$, не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a;\ \ f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-8; 9]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x = a$ расположена вне интервала $(-2;\ 7)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x = -2$; $x = 7$, чем соответствующий конец отрезка.

То есть $\left[\begin{array}{l} a+2 \le -2+8, \\ 7-a \le 9-7, \\ a \le -2, \\ a \ge 7, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le 4, \\ a \ge 5. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty,\ 4]$, $[5,\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 18$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

В случае $a = 1$ имеем: $10^k + b = 1^b + 18 = 19$, откуда $b = 9$.

В случае $b = 1$ имеем: $10a + 1 = a^1 + 18$, откуда $9a = 17$, что невозможно для целого a.

Далее считаем, что $a > 1$ и $b > 1$

Пусть $a \le 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b \le 9$, так как иначе, если число b– k-значное ($k \ge 2$), имеем:

$a^b \ge 2^{(10^{k-1})} \ge 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \ge 10^{k+1} > \overline{ab}.$

Пусть $a \ge 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b = 2$ и $a \le 31$, так как иначе, если b– k-значное, а a – ($m+1$)-значно ($m \ge 1$), имеем:

если $k > 1$, то $a^b \ge (10^m)^{10^{k-1}} \ge 10^{m\cdot(k+2)} = 10^{(m+m)+m\cdot k} \ge 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k = 1,\ b \ge 3$, то $a^b \ge (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \ge 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k=1,\ b=2,\ m\geq 2$, то $a^b \geq (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;
если $k=1,\ b=2,\ m=1,\ a\geq 32$, то $a^b \geq (32)^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$.

Если $10 \leq a \leq 31$ и $b=2$ приходим к уравнению $10a+2=a^2+18$, откуда $a^2-10a+16=0$. Оба корня $a=2$ или $a=8$ меньше 10.

Конечным перебором всех пар a и b, для которых $1<a\leq 9$ и $1<b\leq 9$ получаем, что уравнению удовлетворяют еще две пары $a=2,\ b=2$ и $a=8,\ b=2$.

Ответ: $a=2,\ b=2;\ a=8,\ b=2;\ \ a=1,\ b=9$.

Замечание

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (четности, свойств делимости, оценок и т.п.). Например:

1. Если $a=2$, получаем: $20+b=2^b+18$, откуда $2^b-b=2$ и, значит, $b=2$.

2. Если $a=3$, имеем: $30+b=3^b+18$, откуда $3^b-b=12$, значит b нечетное, но для $b\geq 3$ $3^b-b\geq 24$.

3. Если $a=4$, имеем: $40+b=4^b+18$.

При $b>3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b=2$ и $b=3$ не одходят.

4. При $a\geq 5$, если $b>2$ в уравнении $10a+b=a^b+18$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Значит, $b=2$. Приходим к уже известному уравнению $a^2-10a+16=0$, корни которого $a=2$ или $a=8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0